CM078: Introdução à Topologia (Prova 2)
Prof. Alberto Ramos
Junho de 2018

Nome: ______________________________

Q:	1	2	3	4	5	6	Total
P:	20	25	10	25	10	10	100
N:							

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação.
Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Seja X um espaço métrico sequencialmente compacto. Então, prove que

(a) $\boxed{10}$ X é totalmente limitado;

(b) $\boxed{10}$ X é completo.

Questão 2 .... $\boxed{25}$

Seja $E \subset \mathbb{R}^m$ tal que toda função continua $f : E \to \mathbb{R}$ atinge seu mínimo. Mostre que

(a) $\boxed{10}$ E é fechado;

(b) $\boxed{15}$ E é limitado.

Questão 3 .... $\boxed{10}$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continua tal que $\|x\| \leq \ell |f(x)|$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $\ell > 0$. Mostre que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto. Então, $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto.

Questão 4 .... $\boxed{25}$

Dizemos que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é Holder continua com expoente $\alpha \in (0,1]$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \text{ para todo } x, y \in [0,1].$$

Defina a norma

$$\|f\|_\alpha := \max\{|f(x)| + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} : \text{ para todo } x, y \in [0,1], x \neq y\}.$$

Mostre que $\mathcal{B} := \{f \in C[0,1] : \|f\|_\alpha \leq 1\}$ tem fecho compacto como subconjunto de $C[0,1]$.

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Seja f, g duas função contínuas definidas sobre um espaço métrico X. Se existe um subconjunto denso D tal que $f(x) = g(x)$, $x \in D$. Mostre que as duas funções são iguais em X.

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Considere X um espaço métrico compacto. Seja $\{F_n\}$ uma família enumerável de fechados em X tal que $F_n \neq \emptyset$ e $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prove que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.